ПОСТРОЕНИЕ НА ПЛОСКОСТИ ОТРЕЗКА ЗАДАННОЙ ВЕЩЕСТВЕННОЙ ДЛИНЫ

Научный руководитель:
к.ф.-м.н., учитель физики первой категории
Агеев Алексей Игоревич

Выполнил: Жиляев Никита
ученик 8 "А" класса МБОУ СОШ № 4
с УИОП им. Г.К. Жукова г.о. Краснознаменска

Содержание проекта

1. Мотивация

2. Цель проекта и оборудование

3. Алгоритм построения: суммы/ разности двух отрезков; заданной доли отрезка; отрезка с иррациональной длиной

4. Выводы

5. Задача-гипотеза

6. Список литературы

Мотивация

Определение: вещественное ненулевое число *a* будем называть «геометрическим», если с использованием только циркуля и линейки можно построить на плоскости отрезок с длиной, заданной в некоторой системе единиц числом *a*

Выяснить, какие вещественные числа являются «геометрическими»

Цель проекта

Разработка алгоритма построения на плоскости отрезка, длина которого может быть записана вещественным числом в некоторой системе единиц

Оборудование:

- Циркуль (прибор для построения на плоскости окружности заданного радиуса)
- Линейка (прибор для проведения прямых через две точки)
- Эталонный отрезок единичной длины
- Заданные отрезки с целочисленными длинами

Отрезок вида $\alpha a \pm \beta b$; $\alpha, \beta \in \mathbf{N}$

Цель: построение отрезка с длиной равной сумме или разности длин двух заданных отрезков

1. Проводим прямую l и отмечаем на прямой точку A
2. Проводим окружность радиуса a с центром в точке A и отмечаем точку B пересечения окружности с прямой l
3. Повторяем α раз шаги 1 и 2 для отрезка $AB=a$, принимая за новый центр окружности (A) точку B. Получаем отрезок длиной αa
4. Повторяем β раз шаги 1-3 для отрезка длиной b. Получаем отрезок длиной βb
5. Строим на прямой l' окружность радиуса αa с центром в точке C и окружность радиуса βb с центром в точке C
6. Получаем отрезок вида αa-βb
7. Строим на прямой l'' окружность радиуса αa с центром в точке C и окружность радиуса βb с центром в точке пересечения первой окружности с прямой l''
8. Получаем отрезок вида $\alpha a+\beta b$

Отрезок вида $(\alpha/\beta)a$; $\beta>\alpha$; $\alpha, \beta \in \mathbf{N}$

Цель: построение заданной доли отрезка

1. Проводим прямую l и отмечаем на прямой точку A
2. По доказанному ранее: из точки A проводим луч и строим на луче отрезок длины αa, состоящий из α отрезков длиной a
3. Проводим из точки A другой луч и строим на луче отрезок длины βa, состоящий из β отрезков диной a
4. Проводим прямую через крайние точки отрезков αa и βb. Получаем отрезок CD. Через промежуточные точки, полученные на отрезке βb при его построении, проводим прямые параллельные отрезку CD до пересечения с лучом αa
5. По теореме Фалеса: полученное семейство параллельных прямых делит луч αa на β равных частей
6. Таким образом, построили заданную долю (α/β) отрезка a
7. Объединяя полученный результат с предыдущим пунктом, можем построить отрезок вида $\eta a \pm \rho b$, где $\rho, \eta \in \mathbf{Q}$

Построение отрезка иррациональной длины

Отрезок с длиной, выраженной корнем натуральной степени двойки

1. Проводим прямую l, отмечаем точку A и строим на прямой из точки A отрезки с заданными длинами a и b
2. Строим на прямой окружность с диаметров $(a+b)$
3. Строим в смежной для отрезков a и b точке перпендикуляр к отрезку $(a+b)$
4. Проводим прямую, проходящую через перпендикуляр до пересечения с окружностью. Получаем прямоугольный треугольник, опирающийся на диаметр $(a+b)$
5. Построенный перпендикуляр – высота h в прямоугольном треугольнике, опущенная из прямого угла на гипотенузу (a+b), равная $(ab)^{0.5}$ – по свойству высоты прямоугольного треугольника
6. Применяя n раз пункты 1-5, строим отрезок с длиной, равной корню n-ой степени двойки из высоты h. В качестве отрезка a выбираем эталонный отрезок единичной длины

Вывод

Разработан алгоритм построения на плоскости отрезка с длиной, задаваемой в некоторой системе единиц числовым выражением вида:

$$\alpha a + \beta b + \gamma \sqrt[\delta]{c}$$

a, b, c – заданные целочисленные отрезки

$$\alpha, \beta, \gamma \in \mathbf{Q} \quad \delta = 2^k \ (k \in \mathbf{N})$$

В результате выполненного исследования найдено множество «геометрических» чисел, элементы которого могут быть получены по указанной формуле, или в виде всевозможных комбинаций с использованием операции извлечения корня указанной степени

Задача-гипотеза

Существуют *ли* такие b и $k \neq 2^n$, принадлежащие натуральным числам; *конечное* подмножество натуральных чисел p_i с необязательно различными элементами; *конечные* подмножества рациональных чисел $a_i > 0$ и q_i с необязательно различными элементами такие, что:

$$b^{1/k} = \sum_i q_i a_i^{1/2^{p_i}}$$

Список литературы

1. *Атанасян Л.С., Бутузов В.Ф., Кадомцев и др.* Геометрия. 7-9 классы: учеб. для общеобразовательных учреждений. – М.: Просвещение, 2010. 384 с.
2. *Пресман А.* Решение квадратных уравнений с помощью циркуля и линейки // Квант. 1972. № 4. С. 34-35.
3. *Декарт Р.* О задачах, которые можно построить, пользуясь только кругами и прямыми линиями // Квант. 1996. № 3. С. 9-11.