Муниципальный конкурс методических разработок

«ФГОС в действии»

Направление конкурса «Технология достижения личностных и метапредметных результатов обучения»

**Методическая разработка**

**«Формирование метапредметных результатов обучения**

**на уроках математики**

**через технологию междисциплинарного обучения**

**и организацию эксперимента с использованием возможностей компьютерных программ Живая Математика и GeoGebra»»**

Муниципальное автономное общеобразовательное учреждение «Гимназия»

Учитель: Кулиш Татьяна Олеговна,

предмет: математика,

высшая квалификационная категория

Новоуральск, 2017 г.

Содержание

|  |  |
| --- | --- |
| Введение ……………………………………………………………………………………… | 3 |
| Возможности технологии междисциплинарного обучения в формировании метапредметных результатов обучения ……………………………………………………. | 4 |
| Организация исследовательской деятельности учащихся на уроке через проведение эксперимента с применением компьютерных программ Живая математика и GeoGebra | 6 |
| Заключение ……………………………………………………………………………………. | 9 |
| Список используемых источников …………………………………………………………... | 10 |
| Приложение 1. Характеристики компьютерных программ Живая Математика и GeoGebra ………………………………………………………………………………………. | 11 |
| Приложение 2. Конспект урока «Неравенство треугольника», 7 класс …………………. | 13 |
| Приложение 3. Способы создания проблемной ситуации на уроке ……………………… |  |
| Приложение 4. Задание для эксперимента «Уравнение окружности»……………………. | 19 |
| Приложение 5. Методический комплект «Подготовка к ОГЭ: решение задач с параметрами с использованием возможностей компьютерной программы Живая Математика» ………………………………………………………………………………….. | 20 |
| Приложение 6. Презентация опыта работы с программой Живая Математика ………… | 21 |
| Приложение 7. Задание для эксперимента «Как построить график функции  ?» …………………………………………………………………………. | 22 |
| Приложение 8. Задание для эксперимента «Влияние параметров *a, b, c* на график )» …………………………………………………………………………… | 24 |
| Приложение 9. Задание для эксперимента «Влияние параметров *k* и *b* на график функции *y = kx + b*» …………………………………………………………………………. | 27 |
| Приложение 10. Задание для эксперимента «Теорема синусов» …………………………. | 29 |

Введение

В настоящее время учителя 1-6 классов работают по ФГОС. Новые стандарты требуют изменений в системе работы: мы должны получить результаты не только предметные, но и метапредметные, и личностные. А для этого необходимо формировать у наших учеников универсальные учебные действия.

На протяжении последних лет автор ведет уроки математики в технологии междисциплинарного обучения, основанной на системно-деятельностном подходе. Когда мы, педагоги гимназии, столкнулись с проблемой реализации ФГОС, мы с радостью отметили, что технология, в которой работает наша гимназия, как раз и отвечает современным требованиям, о которых говорится в новых стандартах, так как её цель - развитие личности учащегося на основе освоения способов деятельности.

Главным стержнем технология междисциплинарного обучения является положение о том, что методика обучения должна всегда соответствовать структуре продуктивного мыслительного процесса: постановка проблемы – поиск путей ее решения – формулировка вывода – проверка вывода. Данная структура мыслительного процесса положена в основу определения этапов урока в технологии междисциплинарного обучения: мотивация, исследование, обмен информацией, организация и связывание информации, рефлексия, применение. Выстраивая урок в технологии МДО, учитель формирует коммуникативные, регулятивные, познавательные универсальные учебные действия. То есть эта технология является инструментарием для внедрения ФГОС.

Системно-деятельностный подход к обучению требует развивать умения самостоятельно добывать знания, а для этого ученик должен уметь ставить вопрос для исследования, уметь проводить эксперимент и представлять в различной форме информацию, полученную в ходе эксперимента. Говоря об эксперименте, мы чаще всего представляем уроки физики, химии, но редко – уроки математики.

Таким образом, возникает противоречие между требованиями ФГОС по формированию метапредметных умений, с одной стороны, и недостаточностью специальных средств (например, компьютерных инструментов) и методических пособий по организации проведения эксперимента по математике, с другой.

Обозначилась проблема: недостаточность освещения способов формирования метапредметных умений обучающихся средствами предмета математики в соответствии с требованиями ФГОС. Поэтому автор поставила для себя цель разработать исследовательские задания по интерактивным чертежам, выполненным средствами специальных компьюторных программ, и провести их апробацию.

Для осуществления поставленной цели пришлось научиться работать с компьютерными программами, которые можно использовать на уроках математики как виртуальные лаборатории. Автор в 2011 и в 2013 г. прошла обучение по работе с программой Живая Математика на интернет-портале «Сеть творческих учителей», в 2016 году – с программой GeoGebra через вебинары Летней Математической Школы проекта egetrener. Живая Математика – лицензионная программа (гимназия обладает лицензией), GeoGebra – свободно распространяемая.

По ключевым темам математики 7-11 классов созданы динамические чертежи, по которым учитель организует эксперимент. Исследования свойств геометрических объектов, графиков функций по динамическим чертежам дает огромный педагогический эффект: в ходе изменения параметров объектов ученик сам делает открытие!

Авторские Цифровые Образовательные ресурсы, созданные на базе программы Живая Математика, хранятся на Google-диске. Новые возможности программы GeoGebra позволили создавать Java-апплеты – динамические чертежи, которые размещены на сайте Гимназии в авторской Математической лаборатории. В результате любой пользователь, посещающий этот сайт, может работать с интерактивным чертежом с помощью Web-браузера (установка программы не нужна!)

* 1. **Возможности технологии междисциплинарного обучения в формировании метапредметных результатов обучения.**

Примером эффективной технологии, осуществляющей системно-деятельностный подход, является технология междисциплинарного обучения. Эта технология разработана ведущим научным сотрудником Психологического института Российской академии образования профессором Н.Б. Шумаковой. Идеи, положенные Натальей Борисовной в основу программы «Одаренный ребенок», частью которой является технология междисциплинарного обучения, в настоящее время отражены в ФГОС.

Действительно, работа в технологии МДО направлена на решение следующих задач:

* развитие творческого, критического и логического мышления, способности к решению проблем (формирование познавательных универсальных учебных действий);
* развитие способностей к самостоятельному приобретению знаний и исследовательской работе, обучение исследовательским навыкам и умениям (формирование регулятивных и познавательных универсальных учебных действий);
* обучение умениям работать совместно, решать проблемы в малых группах, проводить совместную исследовательскую работу, вести диалог и дискуссию, принимать точку зрения другого человека и т.п. (формирование коммуникативных универсальных учебных действий);
* развитие способности к самопознанию, формирование положительной "я-концепции" и понимания ценности и уникальности другого человека (формирование личностных универсальных учебных действий).

В основе технологии междисциплинарного обучения лежит ***метод открытия или исследования***, предполагающий построение обучения как творческого процесса открытия ребенком мира.

Метод исследования представляет собой воспроизведение естественного процесса открытия или познания действительности. Он позволяет воспроизвести полную структуру цикла мыслительного акта, включая самый первый этап возникновения вопроса и формулирования проблемы и завершающий этап – доказательства или обоснования решения. Таким образом, чтобы на уроке развивалась исследовательская активность ученика, необходимо, чтобы структура урока в той или иной мере соотносилась со структурой продуктивного мыслительного процесса.

Основной способ организации деятельности учащихся на уроке – групповая работа.

На основании анализа задач, которые позволяет решать технология междисциплинарного обучения (в дальнейшем – МДО), и ее особенностей можно сделать вывод о широких возможностях использования технологии в формировании регулятивных, коммуникативных и познавательных учебных действий. То есть технология МДО является инструментарием формирования универсальных учебных действий.

Структура мыслительного процесса положена в основу определения этапов урока в технологии МДО: мотивация, исследование, обмен информацией, организация и связывание информации, рефлексия, применение. Центральное место на уроке принадлежит исследованию. В технологии МДО исследование может быть либо индуктивным, либо дедуктивным.

Этап мотивации — ключевой этап урока-исследования. Именно мотивация обеспечивает цельность мыслительного процесса, его подчиненность одной идее, что определяет прохождение урока-исследования «на одном дыхании». В связи с этим его целью является создание таких условий, которые обеспечат возникновение у учащихся вопроса (в случае индукции) или гипотезы (в случае дедукции). Создание учителем условий для возникновения вопроса представляет собой не что иное, как создание проблемной ситуации.

Выделяют четыре основных приема создания проблемной ситуации:

* Прием «ключевых слов».
* Прием «загадки-интерпретации».
* Выполнимое/невыполнимое действие.
* «Погружение» в проблему.

Самый первый способ – прием «ключевых слов» – отличается своей универсальностью. Он часто применяется тогда, когда все другие способы создания проблемных ситуаций представляются затруднительными. Он обеспечивает возникновение вопроса, который вызывает необходимость поиска решения и является регулятором этою поиска, что составляет необходимое условие проведения индуктивного исследования.

Для дедуктивного исследования, основной задачей которого является развернутое обоснование найденного принципа, закономерности, обобщения, широко используется другой способ создания мотивации — прием «загадки». Самым важным в этом случае является некоторая гипотетическая связь между изображением, схемой, словами и т.д., а точнее, между их интерпретацией и той гипотезой, которая должна возникнуть у учащихся.

В третьем случае проблемная ситуация создается с помощью какого-то задания с «ловуш­кой». Характерным является то, что детям предлагается выполнить такое задание, которое *субъективно кажется выполнимым* и не представляющим каких-либо трудностей. В процессе же его выполнения зарождается сомнение или обнаруживается не­возможность его осуществления. Возникшая проблема пере­живается ребенком тем ярче, чем более простым казалось предложенное задание. Преимущество данного способа создания мо­тивации состоит в том, что он обеспечивает возникновение очень сильной потребности в познании того нового, что не­обходимо узнать детям.

Наконец, четвертый способ создания мотивации на уроке – погружение в проблему. Создание проблемной ситуации в этом случае основано на личностной реакции ребенка на тот или иной «стимульный материал».

Работа автора с компьютерными программами позволила найти пятый, *новый способ* создания проблемной ситуации. Он заключается в формулировке гипотезы на основании анализа результатов эксперимента в программах Живая Математика или GeoGebra (Примеры различных приемов мотивации см. в Приложении 3).

Таким образом, на этапе «Мотивация» реализуется цель – формирование умений ставить вопрос для исследования (познавательные УУД).

Этап мотивации плавно перетекает в этап исследования. Исследование на­правляется сформулированной проблемой, которая и регу­лирует поиск, осуществляемый ребенком. Работа, как правило, проводится в группах по 4 человек, с использованием для каждой группы разного исходного материала, на основа­нии которого учащиеся и осуществляют свой поиск. На этапе исследования реализуются такие цели, как формирование коммуникативных УУД (умение работать в группе; умение формулировать собственное мнение и позицию, аргументировать и координировать её при выработке общего решения в совместной деятельности), познавательных УУД (умение проводить эксперимент под руководством учителя; умение представлять, анализировать и обобщать информацию, полученную в ходе эксперимента, в виде таблицы и т.д.).

На этапе обмена информацией каждая группа представляет результаты исследования. На данном этапе урока реализуются познавательные УУД – умение адекватно использовать речевые средства для решения различных коммуникативных задач, строить монологическое высказывание.

На этапе организации и связывания информации в случае дедуктивного исследования происходит формулирование заключения о доказанности или недоказанности гипотезы, или в случае индуктивного исследования открытие и формулирование нового знания. На данных этапах реализуются цели: формирование коммуникативных УУД (умение устанавливать и сравнивать разные точки зрения, прежде чем принимать решения и делать выбор); познавательных УУД (умение объяснять явления, процессы, связи и отношения, выявляемые в ходе исследования).

На следующем этапе - подведения итогов и рефлексии осуществляется рефлексия проделанной мыслительной работы. С детьми обсуждаются вопросы, достигнута ли поставленная задача исследования, каким образом она достигнута, что осталось невыясненным, что нуждается в уточнении. При этом происходит формирование регулятивных УУД (умение соотносить свои действия с полученными результатами; умение осуществлять познавательную рефлексию в отношении действий по решению учебных и познавательных задач).

Конспекта урока «Неравенство треугольника» позволяет ознакомиться с целеполаганием на каждом этапе урока, исходя из требований ФГОС (Приложение 2).

На основании анализа функционального назначения каждого этапа урока можно сделать вывод, что технология МДО – инструментарий формирования УУД.

* 1. **Организация исследовательской деятельности учащихся на уроке через проведение эксперимента с применением компьютерных программ Живая математика и GeoGebra.**

Способам исследовательской деятельности детей нужно обучать в ходе специально организованной учебной работы. Использование на практике виртуальных лабораторий дает в руки мощный инструмент для формирования метапредметных умений, например, таких, как умение проводить эксперимент, умение формулировать гипотезу, умение анализировать и обобщать полученную в ходе эксперимента информацию, умение понимать и использовать математические средства наглядности для иллюстрации, аргументации. Это способствует формированию ИКТ-компетентности обучающихся: выпускник научится проводить исследования и эксперименты в виртуальных лабораториях, создавать различные геометрические объекты с использованием специальных компьютерных инструментов [11].

Автор создала в компьютерных программах динамические чертежи для 7-11 классов, разработала исследовательские задания по этим чертежам, провела их апробацию. Под динамическим чертежом будем понимать выполненный на компьютере чертеж, соответствующий условию задачи, с выведенными (при необходимости) на монитор числовыми параметрами. Динамический чертеж несет в себе способность к изменению, сохраняющий, однако, заложенные в рисунок свойства фигуры [12, c.17].

Технически выполнение динамических чертежей в программах ЖМ и GeoGebra отличаются, но в данной статье автор не ставила целью освещение приемов работы с программами. Авторские ресурсы на базе программы Живая Математика хранятся на Гугл-диске <https://drive.google.com/file/d/0B8Ab5R0kAuKoYmlTbmhBdERiYnc/view?usp=sharing>, при необходимости любой учитель может воспользоваться нужным динамическим чертежом для урока. В этом случае на компьютере должна быть установлена программа Живая Математика (версия 5.0). Динамические чертежи в GeoGebra выполнены сравнительно недавно, при этом на сайте гимназии в разделе Математическая лаборатория размещены Java-апплеты <https://gim47ngo.ru/homework/math/math.php>. Актуальным является возможность ученика, учителя, родителя работать с этими чертежами в любое время и с любого устройства: персонального компьютера либо смартфона.

Использование динамических чертежей в практике современного учителя довольно широко. Если мы строим урок в технологии МДО, то на этапе мотивации чертежи будут средством для формулировки гипотезы на основании фактов, полученных в результате эксперимента. На этапе исследования проведение эксперимента по динамическим чертежам поможет собрать факты для получения нужного обобщения. Можно составить задания на классификацию объектов, полученных в результате эксперимента. Динамические чертежи подходят и для индивидуальной работы, поэтому их можно использовать в лабораторных работах при дистанционном обучении.

Поделюсь опытом, как автор организует эксперимент с динамическим чертежом. Обычно работа проходит в группах по 4 человека. В каждой группе есть ноутбук, на котором есть доступ к динамическим чертежам. Учащиеся по заготовленной инструкции изменяют с помощью движков в Живой Математике (или ползунков в GeoGebra) нужные элементы, при помощи компьютерных инструментов проводят измерения, заносят результаты в таблицу и на основе проделанной работы выдвигают гипотезы, то есть сами открывают нужные факты. Сформулированная гипотеза и является мотивацией к дальнейшему разрешению проблемной ситуации: гипотезу нужно будет либо подтвердить, либо опровергнуть.

Ниже приведен пример исследовательских задания для проведения эксперимента, разработанных в программе Живая Математика или GeoGebra. К каждому заданию прилагается скан динамического чертежа, по которому обучающийся проводит эксперимент, задание для группы и таблица, в которую вносятся результаты измерений (примеры заданий для проведения экспериментов приведены в Приложениях 4; 7 –10).

Пример (динамический чертеж GeoGebra). Алгебра 8 класс. Урок-исследование «Влияние параметров *а, b, c* на график функции » (Все задания группам представлены в Приложении 4).

Задания группам. Выясните влияние на график функции  : 1) знака *параметра а;* 2) *модуля параметра* *а; 3)параметра с; 4) параметра b.*

Группа 1. Влияниезнака *параметра а*на график функции .

Задание

1. Зайдите на сайте Гимназии в Математическую лабораторию.

Откройте Динамический чертеж «График квадратичной функции» <http://www.gim47ngo.ru/homework/math/al.php> (рис.1)

|  |  |
| --- | --- |
| C:\Users\Таня\Desktop\Метод разработка\Парабола 2.JPGРис. 1 |  |

1. Используя ползунки, меняйте значения параметра *а (рассмотрите a* > 0, *a* < 0, *a* = 0).
2. 3аполните таблицу.
3. Запишите вывод.
4. Приготовьте отчет. Результаты исследования оформите в виде схемы.

*Влияние знака параметра a**на график функции*

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| № | Уравнение функции | Значение *а* | | Существенные признаки графика функции |
| 1. |  | *a*>0 |  |  |
| 2. |  | *a*<0 |  |  |
| 3. |  | *a*=0 |  |  |

*Выводы (заполните пропуски):*

1. *Знак* *параметра а* влияет на *\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_*
2. *Если a = 0, то функция принимает вид , графиком которой является\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_ .*
3. *Если , то графиком является \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_*
4. Если , то ветви параболы направлены ;

если , то ветви параболы направлены .

В ходе урока на этапе исследования каждая группа выполняет своё задание, после чего проходят этапы обмена информацией, организации и связывания информации.

Включение эксперимента по динамическим чертежам на этапе исследования позволяет формировать метапредметные результаты обучения: умение проводить эксперимент в виртуальной лаборатории под руководством учителя; умение представлять, анализировать и обобщать информацию, полученную в ходе эксперимента, в виде таблицы; умение работать в группе. Реализация предметных целей: ученик сможет объяснить, как изменение каждого из коэффициентов квадратичной функции влияет на график этой функции; ученик научится по графику функции исследовать её свойства.

При решения задач с параметрами функционально-графическим методом высока эффективность применения среды Geogebra. Роль динамических чертежей разная. Готовый чертеж может служить источником возникновения вопроса: «Почему график имеет такую форму?». Ученик получает сильный «стимульный материал», чтобы разобраться в проблеме. Опыт работы автора подтверждает оправданность такой формы. Приведу пример работы с заданиями № 23 ОГЭ на построение графиков функций (рис.2).



Рис.2

Уже в 8 классе можно предлагать построение графика дробно рациональной функции. Естественно, изначально восьмиклассник не сможет выполнить такого рода задание. Тогда можно предложить построить график в GeoGebra. Естественно у детей возникает вопрос: «А почему на графике появилась «выколотая» точка?» Для ответа на вопрос прибегаем к аналитическим способам: делим и числитель, и знаменатель дроби на выражение *(2х+1),* но все помнят с начальной школы, что *на ноль делить нельзя!* Но ведь выражение в ноль обращается как раз при *х= - 0,5.* Проблема решена. Впоследствии ученики с удовольствием строят такие графики!

GeoGebra может эффективно применяться не только в передаче знаний, но и способствовать саморазвитию ученика. Появляется возможность участвовать в проектной деятельности. Так, в 2016 году ученик 11А класса под моим руководством успешно защитил практико-ориентированный проект «Создание интерактивных чертежей для Web-страниц». Продуктом данного исследовательского проекта стало создание нескольких интерактивных чертежей для решения задач с параметром в 9 классе из открытого банка заданий ФИПИ. Эти динамические чертежи можно увидеть на сайте Гимназии в Математической лаборатории (раздел «Задачи с параметрами на ОГЭ»).

Таким образом, применение в практике преподавания таких динамических сред, как Живая Математика и GeoGebra, в соответствие с ФГОС обеспечивает возможность реализации индивидуальных образовательных планов обучающихся, осуществления их самостоятельной образовательной деятельности; включения обучающихся в проектную и учебно-исследовательскую деятельность, проведения наблюдений и экспериментов, в том числе с использованием виртуальных лабораторий [11].

Заключение

В связи с внедрением ФГОС в системе общего математического образования назрел момент, когда необходимо изучить вопрос постановки лабораторных заданий и организации такой работы с учащимися с учетом идей экспериментальной математики.

Экспериментальные исследовательские задания, созданные на базе компьютерных программ Живая Математика и GeoGebra, органично вписались в этап исследования урока в технологии междисциплинарного обучения. Это позволило прогнозировать исследование так, чтобы учащиеся самостоятельно на живых чертежах находили нужные факты в ходе поставленных экспериментов, формировать графическую культуру и развивать аналитическое мышление, руководить авторскими проектами учащихся. Значимость методической темы «Формирование универсальных учебных действий на уроках математики через применение технологии междисциплинарного обучения и использование возможностей компьютерной программы Живая Математика», подтверждает экспертное заключение комиссии Всероссийского проекта «Школа Росатома». В 2012 году в конкурсе учителей математики, внедряющих эффективные образовательные технологии реализации требований Федерального государственного образовательного стандарта основного общего и среднего (полного) общего образования, автор признана победителем. Опыт был рекомендован для изучения. С целью обмена опытом в 2013 году для учителей математики страны автор проводила стажировку и получила высокую оценку. В июне 2016 году автор проводила вебинары по обучению учителей работые с программой Живая Математика на базе Интернет-сообщества «Учительская для математиков» проекта Egetrener (ссылки на записи вебинаров см. Приложение 6).

Применение экспериментальных заданий при изучении темы «Функция» начиная с 7 класса и заканчивая 11 классом, даёт свои результаты. Для того чтобы выпускник получил возможность научиться проводить исследования, связанные с изучением свойств функций, в том числе с использованием компьютера, научился на основе графиков изученных функций строить более сложные графики (кусочно-заданные, с «выколотыми» точками и т. п.) [11], учитель должен предоставить ученику способы и методы овладения этими знаниями. Добиться предметных результатов обучения по теме «Функции» удалось благодаря тому, что целеполагание каждого урока выстраивалось с требованиями ФГОС, решение предметных задач шло параллельно с развитием и формированием метапредметных умений. Овладение предметными результатами обучения подтверждается результатами ОГЭ и ЕГЭ. На ОГЭ в 2015 году ученики 9Б класса выполнили задание № 23 второй части на построение графика функции и задачу с параметром на 43,5% (решаемость этого задания по Свердловской обл. – 7,1% [5]). В 2016 году на ЕГЭ по математике (профильный уровень) 11А и 11Б классы выполнили задание № 7 (связь графиков функции и её производной) на 78,1% (по стране процент решаемости этого задания 43,4%).

Повысить качество математического образования можно с помощью включения в образовательный процесс экспериментов, создаваемые либо на базе программы Живая Математика (но она лицензионная), либо GeoGebra (бесплатная). В настоящее время много образовательных учреждений с успехом используют возможности программы GeoGebra – это исследовательские группы Архангельской области (29 школ), Красноярского государственного педагогического университета, Кронштадтского морского кадетского корпуса и др. Опыт передовых школ подтверждает значимость работы по организации экспериментов на уроках математики. Хочется надеяться, что в дальнейшем для каждого учителя интерактивная динамическая среда GeoGebra станет необходимым инструментом в его педагогической деятельности.

Таким образом, интеграция технологии междисциплинарного обучения и возможностей программ Живая Математика и GeoGebra позволяет формировать универсальные учебные действия и достигать метапредметных результатов обучения.

Список источников

1. Асмолов А.Г., Бурменская Г.В., Володарская И.А. Формирование универсальных учебных действий в основной школе: от действия к мысли. Система заданий: пособие для учителя. М.: Просвещение. 2011. 159 с.
2. Введение в GeoGebra, версия 4.2. <http://www.apmath.spbu.ru/cnsa/tex/intro-ru%20Geo%20Gebra.pdf>
3. Живая Математика 5.0: Сборник методических материалов. – М.: ИНТ. 2013. 205 с.
4. Информационные технологии в математике и математическом образовании: материалы II Всероссийской научно-методической конференции. Красноярск, 2013 г./ отв. ред. В.Г. Майер; Краснояр. гос. пед. университет им. В.П. Астафьева. – Красноярск, 2013.
5. [Итоги ОГЭ и ЕГЭ по математике 2015](https://www.google.ru/url?sa=t&rct=j&q=&esrc=s&source=web&cd=4&cad=rja&uact=8&ved=0ahUKEwjM8-6qpfTSAhXKB5oKHSLkCrwQFggrMAM&url=http%3A%2F%2Fschool14.edusite.ru%2FDswMedia%2Fciovkinyuyu.pptx&usg=AFQjCNFh273qJghU0BFH9jZ65FcQ_GpBvg&sig2=Oxrr56BuXb2VnqmHCK6tiQ) Свердл. Обл.
6. Кулиш Т.О. Возможности программы Живая Математика для реализации требований ФГОС. 2013г.

<https://itn.ru/communities.aspx?cat_no=284448&d_no=342769&ext=Attachment.aspx?Id=171921>

1. Кулиш Т.О. Формирование универсальных учебных действий обучающихся через организацию эксперимента с использованием программы Живая Математика. НАУ (ISSN 3385-8879), № 3(8) / 2015, часть 2. <http://national-science.ru/wp-content/uploads/2016/02/national_8_p2_3-5.pdf>
2. Математическая лаборатория, сайт МАОУ «Гимназия». <http://www.gim47ngo.ru/homework/math/math.php>
3. Обучение геометрии с использованием возможностей GeoGebra: учебно-методическое пособие [О.Л.Безумова, Р.П.Овчинникова и др.]. – Архангельск : КИРА, 2011.
4. Одаренный ребенок: особенности обучения / под. ред. Шумаковой Н.Б.// М.: Просвещение. 2006.
5. Примерная основная образовательная программа образовательного учреждения. Основная школа. Серия «Стандарты второго поколения» / [сост. Е. С. Савинов]. — М.: Просвещение. 2011.
6. Храповицкий И.С. Эвристический полигон для геометрии. Компьютерные инструменты в образовании. № 1, 2003. с. 15-26.
7. Шумакова Н.Б. Обучение и развитие одаренных детей. – М.: Издательство Московского социально-психологического института; Воронеж: Издательство НПО «МОДЭК», 2004.
8. Экспериментальная математика в школе. Исследовательское обучение: коллективная монография / М.В. Шабанова, Р.П. Овчинникова и др.‒ М.: Издательский дом Академии Естествознания, 2016.

Характеристики компьютерных программ Живая Математика и GeoGebra

Приложение 1

В настоящее время существует много компьютерных программ, которые можно использовать на уроках математики как виртуальные лаборатории.

Наиболее известные системы динамической геометрии:

* Cinderella (автор Ulrich Kortenkamp, 1998, Германия);
* Математический Конструктор (автор В.Н.Дубровский, 2006, Россия);
* GEONExT (автор Alfred Wassermann, 1999, Германия);
* The Geometer's Sketchpad (автор Nicholas Jackiw; 1998, США);
* программная среда Compass and Ruler (C.a.R) (автор Rene Grothmann),
* GeoGebra (автор Markus Hohenwarter, 2002, Австрия).

Собственный педагогический опыт показал, что наиболее приемлемыми в применении являются компьютерные программы Живая Математика и GeoGebra.

Прообразом программы Живая Математика является американская программа The Geometer's Sketchpad (по-русски, Блокнот Геометра, её создал Nicholas Jackiw в конце 80-х годов). Обладая очень удобным интерфейсом, она быстро завоевала популярность учителей. Программа «The Geometer's Sketchpad» была русифицирована Институтом Новых Технологий (Москва) и распространялась в России сначала под названием «Живая геометрия», а сейчас как «Живая Математика». В 2013 году в России была переведена пятая версия программы, которая имеет много преимуществ над предыдущими версиями. Живая Математика – это компьютерная система интерактивного моделирования, применяемая для исследования и анализа широкого круга задач при изучении геометрии, стереометрии, алгебры, тригонометрии, математического анализа. Программа позволяет создавать красочные, легко варьируемые и редактируемые чертежи, осуществлять их преобразования, а также использовать разработанные методические материалы в учебном процессе [5]. Она достаточна проста в использо вании как учителями математики, так и учащимися. «Живая Математика помогает поставить мысленный эксперимент типа "что если?", почувствовать свойства изучаемой математической конструкции, получить новые результаты, а, кроме того, создать иллюстрации высокого качества», - так написано в справочной системе самой программы. Однако для пользования ресурсами программы необходимо приобрести соответствующую лицензию, что затрудняет ее широкое применение в образовательных учреждениях. Наша гимназия имеет лицензию на использование этой программы.

GeoGebra — это бесплатная, многоплатформенная динамическая математическая программа для всех уровней образования, включающая в себя геометрию, алгебру, таблицы, графы, статистику и арифметику, в одном удобном для использования пакете. Программа написана на Java. Доступна для Linux, Windows, Mac OS X, iOS, Android. Также существуют Portable версии, работающие без установки. Отдельно стоит отметить Web-версию программы (GeoGebra Web Application), работающей прямо в браузере: <http://web.geogebra.org/chromeapp/>. Программа написана Маркусом Хохенвартером на языке Java (работает на большом числе операционных систем). Переведена более чем на 40 языков и в настоящее время активно разрабатывается. Полностью поддерживает русский язык. В июне 2013 года впервые в истории российских научно-методических журналов вышел специальный выпуск Европейского журнала современного образования (European Journal of Contemporary Education, ISSN 2304-9650), посвящённый использованию GeoGebra в учебном процессе. В октябре 2014 г. увидела свет давно анонсированная и ожидаемая версия программы 5.0 со встроенной возможностью работы с 3D чертежами и графиками! Кроме того, у программы богатые возможности работы с функциями (построение графиков, вычисление корней, экстремумов, интегралов и т. д.) за счёт команд встроенного языка (который позволяет управлять и геометрическими построениями).

Широкая функциональность GeoGebra позволяет применять ее учащимися и учителями как во время занятий, так и во внеурочной деятельности. Работать с программой очень удобно. Графики строятся с помощью мыши простым перемещением указателя или расстановкой необходимых точек. Все опорные точки добавляются в список в левой части окна программы. Любую точку можно отредактировать как с клавиатуры, так и перемещая ее мышью. Программа естественным образом расширяет возможности использования интерактивных досок в учебном процессе. А при использовании таких инструментов как ползунки, флажки, кнопки можно построить и наглядно представить интерактивное решение задач любой сложности. Прогрессивным является возможность создания Java-апплетов динамических чертежей для их включения в Веб-страницы

Сравнение функциональных возможностей программGeoGebra и Живая математика

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
|  | Функционал | GeoGebra | Живая Математика |
|  | Свободное распространение | + | - |
|  | Экспорт интерактивных чертежей для Веб-страниц | + | - |
|  | Построение графиков функций | + | + |
|  | Построение графиков уравнений | + | - |
|  | Наличие встроенных в программу движков для работы с параметрами | + | - |
|  | Экспорт чертежей в Word | + | + |
|  | Динамический текст уравнений с параметрами | + | + |
|  | Платформы | Linux, Android, Windows, MacOS | Linux, Windows, MacOS |

Проведя сравнительный анализ данных программ, можем увидеть, что программа GeoGebra обладает большими достоинствами и возможностями.

Ссылки

Программа GeoGebra

1. [Официальный сайт программы](http://www.geogebra.org/) GeoGebra
2. [Прямая ссылка на скачивание " свежей" установочной версии](http://download.geogebra.org/installers/?os=win)
3. [Ссылка на скачивание выборочной версии программы](http://download.geogebra.org/installers/5.0/?C=M;O=D)
4. [Официальное издание пособия "Введение в GeoGebra. Версия 4.2" (русский яз.)](http://static.geogebra.org/book/intro-ru.pdf)
5. [Официальное издание пособия "Введение в GeoGebra. Версия 4.4" (англ. яз.)](http://static.geogebra.org/book/intro-en.pdf)
6. [Презентация "Примеры использования программы GeoGebra"](https://drive.google.com/file/d/0B0gYT4WMwLPpbU1LUmFxTXRJems/view?usp=sharing)

Программа Живая Математика

1. [Официальный сайт программы The Geometer's Sketchpad](http://www.dynamicgeometry.com/)
2. [Институт Новых Технологий](http://www.int-edu.ru/content/rusticus-0)
3. [Сборник методических материалов по УМК Живая Математика версия 5.0](https://yadi.sk/i/v6faEMhprJkwM)

[Н.В. Сенникова Мастер-класс по УМК Живая Математика](https://it-n.ru/communities.aspx?cat_no=270492&lib_no=270718&tmpl=lib)

**Тема урока: «Неравенство треугольника»**

Приложение 2

Цели урока (планируемые результаты обучения):

***Личностные:***

* развитие учебно-познавательной мотивации и интереса к учению.

***Метапредметные:*** развитие у учащихся универсальных учебных действий:

*Коммуникативные:*

* умения работать в группе – устанавливать рабочие отношения, эффективно сотрудничать и способствовать продуктивной кооперации;
* умения формулировать собственное мнение и позицию, аргументировать и координировать её при выработке общего решения в совместной деятельности;

*Познавательные:*

* умения представлять, анализировать и обобщать информацию, полученную в ходе эксперимента, в виде таблиц;
* умение выдвигать гипотезы при решении учебных задач и понимать необходимость их проверки;
* умения формулировать выводы о верности гипотезы.

*Формирование ИКТ-компетентности:* развитие у учащихся универсальных учебных действий:

* умение проводить эксперименты в виртуальной лаборатории «Живая математика».

***Предметные:***

* *развитие умения решать задачи на построение треугольника по трем заданным сторонам с помощью циркуля и линейки;*
* *формирование представлений учащихся о связи длин сторон в треугольнике*.

***Оборудование***

***Технические средства:***

* персональный компьютер;
* ноутбуки – по 2 на группу;
* документ-камера;
* мультимедийный проектор и экран.

***Программные инструменты:***

* операционная система ОС Windows,
* компьютерная программа *Живая Математика* версии 5.0.

***Раздаточный материал:***

* динамический чертеж «Неравенство треугольника» - файл gsp;
* готовый чертеж на нелинованной бумаге А5 для построения треугольника по трем сторонам (Приложение 1);
* таблица каждому ученику (Приложение 2)
* печатная основа для доказательства теоремы (Приложение 3);
* «облачко» для записи гипотезы (Приложение 4);
* формулировка теоремы «Неравенство треугольника» (Приложение 5);
* вопрос (Приложение 6);
* набор чертежных инструментов – циркуль, линейка, карандаш – каждому ученику;
* маркеры.

**Ход урока**

1. **Мотивация**

|  |  |
| --- | --- |
| Учитель | Учащиеся |
| На последних уроках мы с Вами изучаем соотношения между сторонами и углами треугольника.  Какие факты нам известны к настоящему времени о треугольнике? | * Сумма углов треугольника равна 1800. * Мы знаем классификацию треугольников по сторонам, по углам. * В треугольнике против большей стороны лежит больший угол. |
| Какие задачи на построение мы умеем выполнять с помощью циркуля и линейки? | * Строить треугольник по заданным элементам. |
| Какие вы молодцы! Все верно объяснили. А может, мы уже всё про треугольники знаем? Может, пора переходить к более сложным фигурам, например, трапециям, параллелограммам? |  |
| Что ж, проведем разминку и – в путь к новым знаниям! |  |
| Выполните задание: с помощью циркуля и линейки постройте треугольники по заданным трем сторонам. | На заготовленных листах выполняют построение. Причем, в первом случае треугольник удается построить, во втором - нет. |
| Проверим выполнение задания. | Задание 1 проверяем через документ-камеру. |
| Проверим построение второго треугольника.  У кого получилось? | Ученики говорят, что второй треугольник «не строится», «не получается»… |
| А почему вам не удалось выполнить эту задачу?  В чем причина того, что вам не удалось построить треугольник? | * Вы не так стороны нарисовали. * Окружности не пересекаются. |
| Так что же получается: алгоритм построения треугольника по трем сторонам – знаем, а построить этот треугольник не можем? В чем дело? | * ? |
| Может, нам неизвестны еще какие-то закономерности, соотношения в треугольнике? | * ? |
| При решении этой задачи были заданы три стороны. Соотношение между чем нам нужно знать? | * Только между сторонами треугольника. |
| Значит, на какой вопрос мы должны найти ответ? | * ***Какая связь существует между длинами сторон треугольника?*** |
| *На экране высвечивается вопрос «Какая связь существует между длинами сторон треугольника?»* |  |
| Попытайтесь сформулировать тему урока. | * Соотношение между длинами сторон треугольника |
| Откройте тетради, запишите число, классная работа и тему урока. | Работают в тетради. |

|  |  |
| --- | --- |
| Сейчас нам предстоит сделать *первый шаг* на пути открытия нового знания – это сформулировать гипотезу. А для того, чтобы сформулировать гипотезу, я предлагаю провести *эксперимент с использованием* программы Живая математика. Откройте ноутбуки, найдите и откройте документ «Соотношения между сторонами треугольника».  *На экране появляется динамический чертеж.* | Открывают динамический чертеж «Соотношения между сторонами треугольника» |
| **Задание группам**. Выяснить, какая связь существует между длинами сторон треугольника?  План проведения эксперимента   1. Откройте динамический чертеж «Соотношение между длинами сторон треугольника». На экране должен появиться и три движка *а, b, с*, отвечающих за длины соответственных сторон. Нажмите кнопку «Показать окружности». 2. Задайте с помощью движков новое значение длины каждой из сторон *а* и *b.* При этом на протяжении всего эксперимента длину стороны *с* оставляйте неизменной. 3. Внесите данные измерений в таблицу в столбик №1. 4. Сделайте ещё шесть испытаний, занося данные в таблицу. 5. Пронаблюдайте, какую закономерность можно найти между длиной одной стороны и двумя другими. 6. Запишите свою гипотезу о соотношении между длинами сторон треугольника ниже вашей таблицы 7. Обсудите мнения каждого члена группы, выберите одну общую гипотезу, запишите эту гипотезу на облачке. 8. Регламент на проведение эксперимента –5 минут.   **Соотношение между длинами сторон треугольника**   |  |  |  |  |  |  |  |  | | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | | №  измерений  Длина  стороны | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | | ***c*** | 8 | 8 | 8 | 8 | 8 | 8 | 8 | | ***a*** |  |  |  |  |  |  |  | | ***b*** |  |  |  |  |  |  |  |   **Гипотеза о** соотношении между длинами сторон треугольника: \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_ | |
|  | Проводят эксперимент. Формулируют гипотезу. |

Класс разбит на 6 групп по 4 человека. В группе один ноутбук на 2 человека.

В ходе эксперимента ученики должны найти связь между длинами сторон треугольника с использованием возможностей программы Живая математика. Каждый учащийся заполняет таблицу. В ходе обсуждения каждая группа на облачке записывает свою гипотезу. Гипотезы на облачках вывешиваются на доску.

1. **Исследование.**

|  |  |
| --- | --- |
| Учитель | Учащиеся |
| Учитель зачитывает все гипотезы. |  |
| Итак, гипотезы сформулированы. *Какой следующий шаг* по *пути* открытия нового знания? На уроках МДО эту работу вы часто проводите. Что мы сейчас должны сделать? | * Нужно собрать факты для подтверждения или опровержения гипотезы. |
| В качестве такого факта я предлагаю решить задачу. Дан треугольник АВС. Доказать, что АВ < АС + СВ.  *На экране условие задачи 1.* |  |
| Учитель, используя динамический чертеж, фронтально разбирает решение задачи. | Участвуют в обсуждении. |
| После обсуждения учащимся предлагается оформить решение задачи на готовом чертеже.  Регламент работы – 3 минуты. | Учащиеся оформляют решение на листках по готовым чертежам. |
| Проверим решение этой задачи. | Один ученик объясняет свое решение через документ-камеру. |
| Итак, мы решили задачу. Мы доказали, что длина стороны *с* меньше суммы длин сторон *a* и *b*, то есть доказали неравенство… |  |

1. **Формулировка вывода.**

|  |  |
| --- | --- |
| Учитель | Учащиеся |
| Но ведь точно так же мы бы могли доказать, как связана сторона *b* со сторонами *a* и *c*. Какое неравенство в этом случае вы бы получили? |  |
| А ещё какое? |  |
| Давайте обобщим и сформулируем утверждение о соотношении между длинами сторон треугольника. | ***Любая* сторона треугольника меньше суммы двух других его сторон.** |
| *На экране слайд «Любая сторона треугольника меньше суммы двух других его сторон».* |  |
| Утверждение, которое нам удалось доказать, является важной теоремой. Эта теорема носит название Теорема о неравенстве треугольника. |  |
| Итак, подведем промежуточный итог. В начале урока был поставлен вопрос; для ответа на вопрос мы сформулировали гипотезы, мы нашли факты, *на основании фактов мы сформулировали вывод* (что любая сторона треугольника меньше суммы двух других сторон). |  |
| Но сегодня нам осталось сделать еще один шаг по пути открытия нового знания. Какие выводы еще нужно сделать? | * Сделать *выводы о верности гипотез*, сформулированных в начале урока. |
| Вернемся к гипотезам, которые каждая группа выдвинула в начале урока.  Для того, чтобы сделать вывод о верности гипотезы, нужно соотнести гипотезу с полученным выводом, то есть с теоремой о неравенстве треугольника.  (*На экране «Любая сторона треугольника меньше суммы двух других его сторон»).* |  |
| Давайте разберем, какие выводы о верности каждой из гипотез можно сделать. | *(Проходит обсуждение)* |

1. **Применение нового знания.**

|  |  |
| --- | --- |
| Учитель | Учащиеся |
| Итак, мы открыли новое знание. А как новое знание может вам помочь решить проблему, которая возникла в начале урока?  *На экране слайд с заданием на построение треугольника по трем сторонам.*  Положите перед собой листки с заданием «Построить треугольник по трем сторонам». Почему Вы не смогли построить треугольник во втором случае? | * Потому что такой треугольник построить нельзя: большая сторона больше, чем сумма двух других сторон. |
| Проверьте свои предположения. Измерьте длины сторон *а, в* и *с*. Запишите результаты измерений. Объясните, почему треугольник нельзя построить. | * Треугольник нельзя построить, так как не выполняется неравенство треугольника. |
| При изучении геометрии вы часто будете встречаться с задачами на построение. На что в первую очередь вы теперь обратите внимание, если нужно построить треугольник по трем сторонам? | * Нужно проверить, а можно ли в принципе построить этот треугольник? Выполняется ли для всех сторон неравенство треугольника? |

1. **Рефлексия.**

* Что в организации сегодняшнего исследования вы считаете наиболее эффективным?
* Какие виды работы вам сегодня понравились?
* Какие виды работы вы можете использовать на других уроках?

*В подходящий момент показать или озвучить афоризмы:*

* *«Ключом ко всякой науке является вопросительный знак» (Оноре де Бальзак),*
* *«Гениальность - это всего-навсего непривычный взгляд на вещи» (Уильям Джеймс),*
* *«Миллионы людей видели, как падают яблоки, но только Ньютон спросил почему» (Бернард Маннес Барух).*
* Что полезного вы получили после изучения данной темы?
* Какой жизненный урок можно вынести после этого занятия?
* Кому из группы вы бы хотели сказать спасибо?

1. **Домашнее задание.**
2. Доказательство теоремы – с. 74, № 248, 251.
3. Дифференцированное задание к теме «Неравенство треугольника». Докажите, что в прямоугольнике длина диагонали меньше суммы длин смежных сторон.
4. Самостоятельная работа с динамическим чертежом «Неравенство треугольника» gps – сайт гимназии система СДО.

Способы создания проблемной ситуации на уроке-исследовании.

Приложение 3

Пример 1. Использование приема «погружение в проблему». Урок алгебры в 8 классе «Теорема Виета» (см. Приложение <http://festival.1september.ru/articles/312985/>)

В качестве домашнего задания учащимся нужно было решить любые шесть квадратных уравнений из тридцати предложенных. Проверку проводили следующим образом: ученик на доске записывал любое уравнение, а учитель сразу называл его корни. Ученики были в недоумении: каким образом учителю удается так быстро и без вычислений определять корни любого уравнения? Возникает проблемный вопрос: “Существует ли связь между корнями и коэффициентами приведенного квадратного уравнения? Если существует, то какова эта связь?”. После чего начинается индуктивное исследование.

Пример 2. Использование приема «погружение в проблему». Урок математики в 5 классе «Признаки делимости на 3 и на 9».

Учитель предлагает представить число, записанного только с помощью цифры 1, в записи которого 2010 цифр. После этого задается вопрос: «Будет ли делиться это огромное число на 3? А на 9? А какова длина этого числа? Может, найдутся желающие у доски столбиком разделить это число на 3? На 9? (Обязательно найдутся те, которые попытаются выполнить деление, но вскоре поймут, что задача оказывается непосильной). Ученики осознают, что для ответа на вопрос нужны какие-то другие признаки, которые помогут по внешнему виду числа, не прибегая к делению, определить, делится или не делится это число сначала на 3, а затем на 9. Каждая группа записывает свою гипотезу о делимости числа на 3, затем на 9. На этом этапе важно не мешать ученикам: гипотезы не обязаны быть верными! Все гипотезы записываются на «облачко» и вывешиваются на доску. После чего начинается дедуктивное исследование.

Пример 3. Использование приёма «выполнимое-невыполнимое действие». Урок геометрии в 7 классе «Неравенство треугольника» (Приложение 2).

Ученикам предлагают на листках с печатной основой с помощью циркуля и линейки построить треугольник по трем заданным сторонам. Причем, в первом случае треугольник удается построить, во втором – нет. Ученики говорят, что второй треугольник «не строится», «не получается»… В чем дело: алгоритм построения треугольника по трем сторонам – знаем, а построить треугольник не можем!? Может, нам неизвестны еще какие-то закономерности, соотношения в треугольнике? Естественно возникает вопрос: «Какая связь существует между длинами сторон треугольника?». После чего начинается индуктивное исследование.

Пример 4. Использование приёма «формулировка гипотезы на основании анализа результатов эксперимента в программе Живая Математика». Урок геометрии в 9 классе «Теорема синусов».

Учитель предлагает провести эксперимент с динамическим чертежом «Связь длин сторон треугольника с синусами противолежащих углов и радиусом описанной окружности» (Приложение 10). Изменяя положение точки В и заполняя таблицу, ученик сам составляет равенство отношений и формулирует гипотезу (то есть формулировку теоремы синусов). А почему эта формула верна всегда, какой бы радиус окружности мы не брали? На этапе исследования гипотеза должна быть подтверждена или опровергнута. Гипотезу подтверждаем фактами, то есть доказательством теоремы синусов.

Таким образом, на этапе «Мотивация» реализуется цель – формирование умений ставить вопрос для исследования (познавательные УУД).

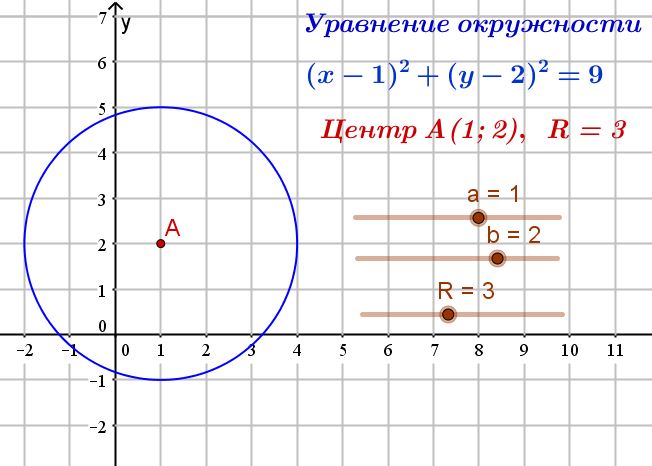
Алгебра 9 класс. Уравнение окружности (динамический чертеж GeoGebra). Домашнее задание – анализ уравнения окружности в ходе проведения самостоятельного эксперимента.

Приложение 4

Задание.

1. Зайдите на сайте Гимназии в Математическую лабораторию.

Откройте Динамический чертеж «Уравнение окружности» <http://www.gim47ngo.ru/homework/math/al.php>



1. Не изменяя значение параметров *b* и R, с помощью ползунка *a* создайте три разных значения *a:* . Понаблюдайте за изменением положения окружности на чертеже. Заполните в таблице строки 1-3.
2. Не изменяя значение параметров *a* и R, с помощью ползунка *b* создайте три разных значения *b:* . Заполните в таблице строки 4-6.
3. Зафиксируйте произвольные значения *а* и *b*, с помощью ползунка R создайте новое значение . Повторите эксперимент два раза, заполнив строки 7-8.
4. Зафиксируйте произвольные значения *а* и *b*, с помощью ползунка R создайте новое значение . Понаблюдайте за изменением окружности на чертеже. Заполните строку 9.
5. Не изменяя значение параметра R, возьмите значения . Понаблюдайте за изменением окружности на чертеже. Заполните в таблице строку 10.
6. Сравнив данные таблицы по строкам, проведите анализ полученных данных и запишите **вывод** (закончите предложения после таблицы)

Как влияют на уравнение и график окружности координаты центра А(*а; b*) и радиус R?

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| № | *a* | *b* | *R* | Координаты центра | Уравнение окружности |
| 1 |  |  |  |  |  |
| … |  |  |  |  |  |
| 10 |  |  |  |  |  |

Вывод: 1) уравнение окружности в общем виде имеет вид:\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_

1. Если центр окружности лежит на оси *Оу*, то уравнение принимает вид:\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_
2. Если центр окружности лежит на оси *Ох*, то уравнение принимает вид:\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_
3. Если центр окружности – точка (0 ; 0), то уравнение принимает вид:\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_
4. Если значение параметра R равно нулю, то окружность вырождается в \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_

Методический комплект «Подготовка к ОГЭ: решение задач с параметрами

Приложение 5

с использованием возможностей компьютерной программы Живая Математика»

Данная методическая разработка прошла открытую экспертизу на интернет-портале «Сеть творческих учителей», получила высокую оценку, рекомендована учителям математики и была опубликована в библиотеке сообщества <https://it-n.ru/communities.aspx?cat_no=41051&d_no=359290&ext=Attachment.aspx?Id=182645>

Пояснительная записка

В методический комплект входят:

1. [Видеоролик\_Задачи с параметрами на ГИА](http://youtu.be/sYO_2FeUjrY) ;
2. Динамические чертежи графиков функций на базе программы Живая Математика;
3. Текстовый документ с заданиями на построение графиков с параметрами.

Необходимое оборудование и материалы: ПК, УМК «Живая математика» (версия 5.0), Windows Media player или любой видеопроигрыватель для просмотра видеоролика, экран, проектор.

Описание медиапродукта

Данный ресурс адресован как учителям математики для проведения занятий при подготовке к ГИА, так и обучающимся, имеющим навыки работы с программой Живая Математика.

Методический комплект состоит из 3-х частей: видеоролика (ссылка на Youtu.be); динамических чертежей, выполненных в программе Живая Математика; текстового документа с заданиями №23 ГИА.

Разбор заданий №23 из вариантов ГИА-2013, представленных в видеоролике, наглядно демонстрирует преимущество обучения решению такого рода задач с использованием программы Живая Математика. В ролике показан алгоритм работы с новым инструментом «Склеим две функции», в дальнейшем им можно воспользоваться для построения графиков «кусочных» функций.

Динамические чертежи, созданные на базе программы «Живая Математика», содержат 12 заданий №23 ГИА, которые встречались на экзамене в 2013 г., на диагностических и тренировочных работах в 2013-2014 учебном году. Данный чертеж содержит инструмент «Склеим две функции», поэтому, скопировав этот ресурс, учитель может использовать инструмент в своих презентациях. Страничка с названием Сетка – заготовка координатной плоскости, её преимущество в том, что потянув за одну из стрелок на концах осей Ох или Оу, Вы можете самостоятельно уменьшить или увеличить задаваемый размер области построения для своих графиков.

Собственный опыт показал, что обучение решению задач с параметрами с использованием Живой Математики дает положительный эффект. Если ребенок самостоятельно управляет параметром с помощью движка, то он быстро получает наглядный ответ на поставленный вопрос. В дальнейшем ученик быстро и осознанно решает такого рода задачи.

Презентация собственного опыта

Приложение 6

по работе с программой Живая Математика

Мастер-класс для учителей математики по работе с программой Живая Математика (Всероссийский уровень) в рамках Летней Математической Школы 2016 года на базе Интернет-сообщества «Учительская для математиков» проекта Egetrener.

Дата проведения: 14 июня 2016 г. – 27 июня 2016 г.

Темы занятий

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| № | Дата | | Тема | Ссылка |
| 0 | 14.06. | | Видеоурок. Вводное занятие по теме  «Знакомство с интерфейсом программы Живая математика версии 5.0» | <https://youtu.be/76V4AlT8WDw> |
| 1 | 20.06 | Вебинар 1. Меню Графики. Графики уравнений с двумя переменными. Параметрические кривые. Создание и использование движков. Использование инструмента Hot text. | | <https://www.youtube.com/watch?v=xrgiMMHjc1I&feature=youtu.be&list=PLJyQpObJKh0zZydaX_R9wTUqONQr3iEd2> |
| 2 | 21.06 | Вебинар 2. Меню Графики. Графики функций и их производных. Дополнительные инструменты. | | <https://www.youtube.com/watch?v=1rAK3YbVlAU&index=19&list=PLJyQpObJKh0zZydaX_R9wTUqONQr3iEd2> |
| 3 | 22.06 | Вебинар 3. Создание тренажеров. Выполнение планиметрических чертежей. Меню Преобразования. Создание презентаций. | | <https://www.youtube.com/watch?v=P2fHZMqN4LM&index=20&list=PLJyQpObJKh0zZydaX_R9wTUqONQr3iEd2> |
| 4 | 27.06 | Вебинар 4. Стереометрия. Построение сечений. Дополнительные инструменты для построения сечений. | | <https://www.youtube.com/watch?v=VqAvqHTCXII&list=PLJyQpObJKh0zZydaX_R9wTUqONQr3iEd2&index=21> |

**Исследование 1. Как влияет параметр *l* на график функции ?**

Приложение 7

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| № | **Исходная**  **функция** | **Новая функция** | **Значение *l*** | Координаты вершины параболы | Ось симметрии | **Куда** сдвинут график и **на сколько** единиц |
| 1 | ***y = x2*** |  |  |  |  |  |
| 2 |  | ***y = (x – 3)2*** |  |  |  |  |
| 3 |  | ***y = (x + 5)2*** |  |  |  |  |
| 4 |  | ***y = (x + 1)2*** |  |  |  |  |
| 5 |  | ***y = (x – 6)2*** |  |  |  |  |

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| № |  |  | **Значение *l*** | ***D(f)*** | **Куда** сдвинут график и **на сколько** единиц |
| 6 |  |  |  |  |  |
| 7 |  |  |  |  |  |
| 8 |  |  |  |  |  |

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| № |  |  | **Значение *l*** | ***D(f)*** | Уравнение вертикальной асимптоты | **Куда** сдвинут график и **на сколько** единиц |
| 9 |  |  |  |  |  |  |
| 10 |  |  |  |  |  |  |
| 11 |  |  |  |  |  |  |

***Вывод:*** *если l > 0, то график сдвинут на \_\_\_\_ единиц;*

*если l < 0, то график сдвинут на \_\_\_\_\_единиц.*

**Исследование 2. Как влияет параметр *m* на график функции ?**

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| № | **Исходная**  **функция** | **Новая функция** | **Значение**  ***m*** | Координаты вершины параболы | Ось симметрии | **Куда** сдвинут график и **на сколько** единиц |
| 1 | ***y = x2*** |  |  |  |  |  |
| 2 |  | ***y = x2 – 3*** |  |  |  |  |
| 3 |  | ***y = x 2 +2*** |  |  |  |  |

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| № |  |  | **Значение *m*** | ***D(f)*** | **Куда** сдвинут график и **на сколько** единиц |
| 4 |  |  |  |  |  |
| 5 |  |  |  |  |  |
| 6 |  |  |  |  |  |

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| № |  |  | **Значение *m*** | ***D(f)*** | Уравнение  горизонтальной асимптоты | **Куда** сдвинут график и **на сколько** единиц |
| 7 |  |  |  |  |  |  |
| 8 |  |  |  |  |  |  |
| 9 |  |  |  |  |  |  |

***Вывод:*** *если m > 0, то график cдвинут на \_\_единиц;*

*если m < 0, то график сдвинут на \_\_\_\_единиц.*

**Исследование 3. Как построить график функции ?**

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  | ***Функция*** | ***Исходная***  ***функция*** | | ***l*** | Сдвиг  по оси Ох | ***m*** | Сдвиг  по оси Оу |  |
| ***Квадратичная функция*** | | | | | | | | Координаты вершины  параболы |
| 1 |  | |  |  |  |  |  |  |
| 2 |  | |  |  |  |  |  |  |
| 3 |  | |  |  |  |  |  |  |
| ***Функция*** | | | | | | | | ***Асимптоты*** |
| 4 |  |  | |  |  |  |  | ***горизонтальная*** |
| ***вертикальная*** |
| 5 |  |  | |  |  |  |  | ***горизонтальная*** |
| ***вертикальная*** |
| 6 |  |  | |  |  |  |  | ***горизонтальная*** |
| ***вертикальная*** |

***Вывод***: чтобы построить график функции **,** нужно:

1) построить вспомогательную систему координат с началом в точке ( ; );

2) в новой системе координат построить график функции ( или **.**

**Влияние параметров *а, b, c* на график функции**

**Задание 1. Выясните** влияние ***знака параметра* *а*** на график функции

1. Зайти по ссылке в Математическую лабораторию. Открыть Динамический чертеж «График квадратичной функции» <http://www.gim47ngo.ru/homework/math/al.php>
2. Используя ползунки, меняйте значения параметра *а (рассмотрите случаи a* > 0, *a* < 0, *a* = 0).
3. 3аполните таблицу.
4. Запишите вывод.
5. Приготовьте отчет. Результаты исследования оформите в виде схемы.

*Влияние* ***знака параметра a*** *на график функции*

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| № | Уравнение функции | Значение *а* | | Существенные признаки графика функции |
| 1. |  | *a*>0 |  |  |
| 2. |  | *a*<0 |  |  |
| 3. |  | *a*=0 |  |  |

*Выводы.*

1. ***Знак*** ***параметра а*** влияет на *\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_*
2. *Если a = 0, то функция принимает вид , графиком которой является\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_ .*
3. *Если , то графиком является \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_*
4. Если , то ветви параболы направлены ;

если , то ветви параболы направлены .

Приложение 8

**Влияние параметров *а, b, c* на график функции**

**Задание 2. Выясните** влияниезначения ***модуля параметра* *а*** на график функции

1. Используя ползунки, меняйте значения параметра *а (возьмите случаи |a|* > 1, *|a|* < 1).
2. Сравните все графики функций, полученные в пункте 2, с графиком функции при *a = 1.*
3. 3аполните таблицу.
4. Запишите вывод.
5. Приготовьте отчет. Результаты исследования оформите в виде схемы.

Влияниезначения ***модуля параметра* *а*** на график функции

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| № | Уравнение функции | Значение *а* | | Существенные признаки графика функции |
| 1. |  | *|a|* > 1 |  |  |
| 2. |  | *|a|* > 1 |  |  |
| 3. |  | *|a|* < 1 |  |  |
| 4. |  | *|a|* < 1 |  |  |

*Выводы.*

1. Значение ***модуля параметра* *а*** *влияет на* ***\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_***
2. Если *|a|* > 1, то ***форма*** параболы совпадает с ***формой*** параболы вдоль оси Оу в *|a|* раз.
3. Если *|a|* < 1, то ***форма*** параболы совпадает с ***формой*** параболы вдоль оси Оу в *|a|* раз.

**Влияние параметров *а, b, c* на график функции**

**Задание 3. Выясните** влияние ***параметра* *b*** на график функции, если *a* < 0.

1. Не меняя значений *а<0*  и *с*, с помощью ползунка *b* изменяйте значения параметра *b*. Проведите наблюдение за поведением графика функции, если изменяется только параметр *b* при неизменных значениях *а* и *с*.
2. Измените значения *а<0*  и *с.*
3. Повторите действия пунктов 2 и 3 несколько раз.
4. 3аполните таблицу (*х0* – абсцисса вершины параболы).
5. Запишите вывод.
6. Приготовьте отчет. Результаты исследования оформите в виде схемы.

Влияние ***параметра* *b*** на график функции

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| № | Уравнение  функции | *a* | *b* |  | Знаки  *b и xо*  *совпадают или противоположны* |
| 1. |  |  |  |  |  |
| 2. |  |  |  |  |  |
| 3. |  |  |  |  |  |
| 4. |  |  |  |  |  |

*Выводы.*

1. ***Параметр b***влияет на \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_
2. **Если *а < 0****, то*  знаки *b и* хо
3. *Найти значение b можно из формулы*

**Влияние параметров *а, b, c* на график функции**

**Задание 4. Выясните** влияние ***параметра* *b*** на график функции, если *a* > 0.

1. Не меняя значений *а>0*  и *с*, с помощью ползунка *b* изменяйте значения параметра *b*. Проведите наблюдение за поведением графика функции, если изменяется только параметр *b* при неизменных значениях *а* и *с*.
2. Измените значения *а>0*  и *с.*
3. Повторите действия пунктов 2 и 3 несколько раз.
4. 3аполните таблицу (*х0* – абсцисса вершины параболы).
5. Запишите вывод.
6. Приготовьте отчет. Результаты исследования оформите в виде схемы.

Влияние ***параметра* *b*** на график функции

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| № | Уравнение  функции | *a* | *b* |  | Знаки  *b и xо*  *совпадают или противоположны* |
| 1. |  |  |  |  |  |
| 2. |  |  |  |  |  |
| 3. |  |  |  |  |  |
| 4. |  |  |  |  |  |

*Выводы.*

1. ***Параметр b***влияет на \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_
2. **Если *а>0,*** *то*  знаки *b и* хо
3. *Найти значение b можно из формулы*

**Задание 5. Выясните** влияние ***параметра с*** на график функции

1. Используя ползунки, меняйте значения параметра *с.*
2. 3аполните таблицу.
3. Запишите вывод.
4. Приготовьте отчет. Результаты исследования оформите в виде схемы.

*Влияние* ***параметра с*** *на график функции*

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| № | Уравнение параболы | Значение *с* | Ордината точки пересечения графика с Оу |
| 1. |  |  |  |
| 2. |  |  |  |
| 3. |  |  |  |
| 4. |  |  |  |

*Выводы.*

1. Значение ***параметра с*** влияет на *\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_*
2. Значение параметра *с* равно точки пересечения параболы с осью \_\_\_ .
3. Если с > 0, то точка пересечения параболы с осью \_\_\_\_ лежит оси *Ох*,
4. Если с < 0, то точка пересечения параболы с осью \_\_\_\_ лежит оси *Ох*,
5. Если *с = 0*, то точка пересечения параболы с осью \_\_\_\_

совпадает с \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_.

**Влияние параметров *k и b* на график функции**

**Задание 1. Выясните** влияние ***параметра b*** на график функции **,** при условии ***k = 0.***

1. Зайдите по ссылке в Математическую лабораторию. Откройте Динамический чертеж «График линейной функции» <http://www.gim47ngo.ru/homework/math/al.php>
2. Используя движки, установите значение параметра ***k = 0.*** На протяжении всего экспериментаоставляйте значение *к* неизменным, а значения параметра *b* изменяйте.
3. 3аполните таблицу (рассмотрите значения *b>0, b<0, b=0*).
4. Запишите вывод.
5. Результаты исследования оформите в виде схемы.

*Влияние* ***параметра b*** *на график функции (при k = 0)*

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| № | Уравнение  прямой | Значение *b* | Ордината точки пересечения графика с осью *Оу* |
| 1 |  |  |  |
| 2 |  |  |  |
| 3 |  |  |  |

*Выводы.*

1. При ***k = 0***  функция принимает вид*,* графиком которой является прямая*,* оси *\_\_\_\_\_\_.*
2. Значение ***параметра b*** влияет на *\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_*
3. Значение параметра *b* равно точки пересечения прямой с осью \_\_\_ .
4. Если *b* > 0, то точка пересечения прямой с осью \_\_\_\_ лежит оси *Ох*.
5. Если *b* < 0, то точка пересечения прямой с осью \_\_\_\_ лежит оси *Ох*.
6. Если *b = 0*, то прямая совпадает с \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_.

Приложение 9

**Влияние параметров *k и b* на график функции**

**Задание 2. Выясните** влияние ***параметра b*** на график функции **,** при условии ***k 0.***

1. Используя движки, установите значение параметра ***k 0.***
2. При фиксированном значении параметра *k* меняйте *значения b* (рассмотрите случаи *b 0, b0, b0*).
3. Повторите пункты №1 и №2 несколько раз.
4. 3аполните таблицу (рассмотрите *b 0, b 0, b 0*).
5. Запишите вывод.
6. Результаты исследования оформите в виде схемы.

*Влияние* ***параметра b*** *на график функции (k 0)*

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| № | Уравнение  прямой | Значение *b* | Ордината точки пересечения графика с осью *Оу* |
| 1 |  |  |  |
| 2 |  |  |  |
| 3 |  |  |  |

*Выводы.*

1. При ***k 0***  графиком функции  является прямая*,* оси *Ох.*
2. Значение ***параметра b*** влияет на *\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_*

*\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_*

1. Значение параметра *b* равно точки пересечения прямой с осью \_\_\_ .
2. Если *b > 0,* то точка пересечения прямой с осью \_\_\_\_ лежит оси *Ох*.
3. Если *b < 0,* то точка пересечения прямой с осью \_\_\_\_ лежит оси *Ох*.
4. Если *b = 0*, то функция принимает вид*,* графиком которой является прямая*,* проходящая через \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_.

**Влияние параметров *k и b* на график функции**

**Задание 3. Выясните** влияние ***параметра k***  на график функции **,** при условии ***b 0.***

1. Используя движки, установите значение параметра ***b 0.*** На протяжении всего экспериментаоставляйте значение *b* неизменным, а значения параметра *k*  изменяйте.
2. 3аполните таблицу (рассмотрите значения *k >0, k<0, k=0*).
3. Запишите вывод.
4. Результаты исследования оформите в виде схемы.

*Влияние* ***параметра k*** *на график функции (при b 0)*

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| № | Уравнение  прямой | Значение *k* | Четверти,  в которых лежит прямая  (I, II, III или IV) |
| 1 |  |  |  |
| 2 |  |  |  |
| 3 |  |  |  |
| 4 |  |  |  |

*Выводы.*

1. При ***b = 0***  функция принимает вид*,* графиком которой является прямая*,* проходящая через точку*(\_\_;\_\_)*
2. Значение ***параметра k*** влияет на *\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_*

*\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_*

1. Если ***k 0*** , то график расположен в четвертях.
2. Если ***k 0*** , то график расположен в четвертях.
3. Если ***k 0*** ( и *b 0),* топрямаясовпадает с осью **\_\_\_\_.**

**Влияние параметров *k и b* на график функции**

**Задание 4. Выясните** влияние ***параметра k***  на график функции **,** при условии ***b 0.***

1. Используя движки, установите значение параметра ***b 0.***
2. При фиксированном значении параметра *b* меняйте *значения k* (выбирайте *k 0, k 0, k 0*).
3. Повторите пункты №1 и №2 несколько раз.
4. 3аполните таблицу (рассмотрите значения *k >0, k<0, k=0*).
5. Запишите вывод.
6. Результаты исследования оформите в виде схемы.

*Влияние* ***параметра k*** *на график функции (при b 0)*

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| № | Уравнение  прямой | Значение *k* | Угол между прямой и положительным направлением оси *Ох*  (острый или тупой) |
| 1 |  |  |  |
| 2 |  |  |  |
| 3 |  |  |  |
| 4 |  |  |  |

*Выводы.*

1. Значение ***параметра k*** влияет на *\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_*

*\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_*

1. Значение  *,* где *–* угол между \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_

\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_

1. Если ***k 0*** , то угол - \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_
2. Если ***k 0*** , то угол - \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_
3. Если ***k 0*** ( и *b 0),* топрямаяпараллельна оси **\_\_\_\_.**

**Связь между сторонами треугольника, синусами противолежащих углов и радиусом описанной окружности**

Задание. Выясните, какая связь существует между сторонами треугольника, синусами противолежащих углов и радиусом описанной окружности

1. Откройте в Живой Математике Динамический чертеж «Связь между *стороной, синусом противолежащего угла и радиусом описанной окружности*». На экране монитора должна появиться картинка Рис.1):

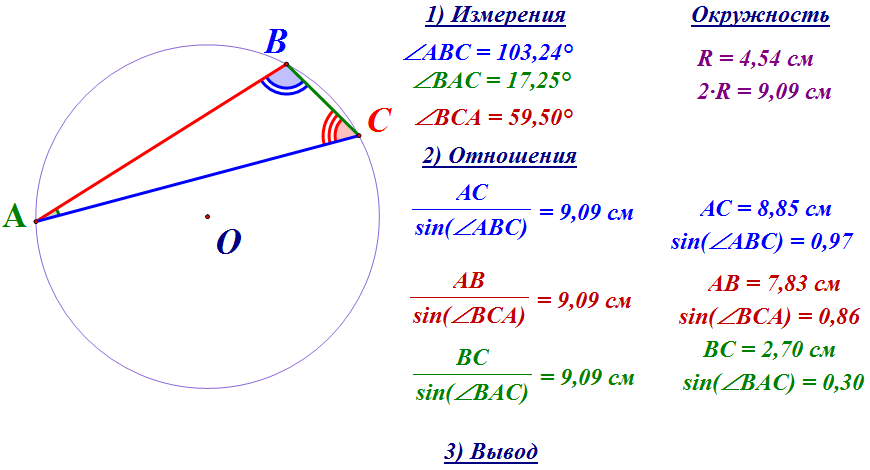
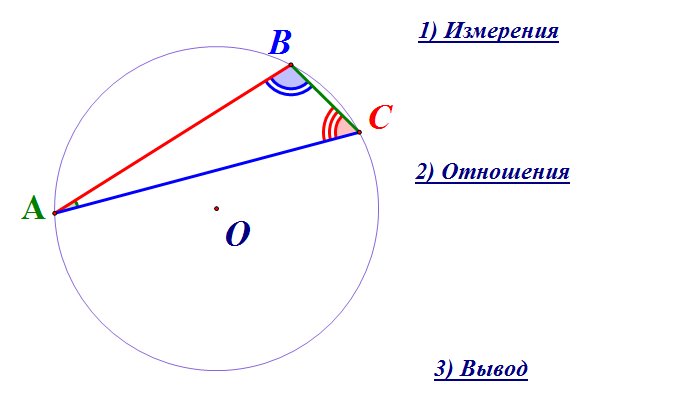
Рис. 2

Рис. 1

1. Измените положение точки В, измерьте длины сторон, синусы углов и заполните строку 1 таблицы (при этом на экране монитора будут отражаться результаты измерений сторон, углов, отношений, рис. 2).
2. Повторите предыдущий пункт ещё раз.
3. Измените радиус окружности, потянув за точку О.
4. Повторите пункты 2-4.
5. Проведите анализ данных таблицы, полученных в четырех последних столбиках.
6. Запишите вывод по результату исследования.

*Результаты эксперимента*

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| № | *a* | *b* |  | *sinA* | *sinB* | *sinC* |  |  |  | *2R* |
| *1* |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| *…* |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |

**Вывод:\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_**

Приложение 10